

Hans-Joachim Kleinfeld, Wiesbaden

Datumstransformation vom WGS 84 in das Gauß-Krüger-Koordinatensystem

1 EINLEITUNG

In Deutschland hat sich zur zahlenmäßigen Festlegung und Beschreibung der Lage von Punkten das Gauß-Krüger-Koordinatensystem durchgesetzt, und zwar nicht nur im Vermessungsbereich, sondern durch Bereitstellen von Kartenunterlagen auch für andere Nutzerkreise. Seit einiger Zeit ist es möglich, Positionsbestimmungen mit Hilfe von Satelliten durchzuführen. Die in der Satellitengeodäsie ermittelten Positionen beziehen sich beim Navigation System with Time and Ranging Global Positioning System (NAVSTAR GPS) bis 1985 auf das World Geodetic System (WGS) 72 und seit 1986 auf das WGS 84. Dem fachfremden Nutzer stellt sich nun das Problem, die vom Satellitenempfänger bereitgestellten geozentrischen dreidimensionalen Koordinaten mit herkömmlichen Kartenwerken oder mit der Örtlichkeit in Verbindung zu bringen.

Der Vermessungspraktiker muß in der Lage sein, die GPS-Koordinaten bezüglich ihres geodätischen Datums zu beurteilen und sie bestmöglichst in das Landesdatum zu transformieren. Hier kann und muß der Vermessungsingenieur und Hydrograph sachkundige Hilfestellung leisten.

Der folgende Aufsatz zeigt eine Möglichkeit, die vom Satellitenempfänger erzeugten Koordinaten in das Gauß-Krüger-Koordinatensystem zu transformieren.

2 GEODÄTISCHE GRUNDLAGEN DER DATUMSTRANSFORMATION

Seit frühester Zeit (Erathostenes, 250 vor Christus) ist der Mensch daran interessiert, die Gestalt und Größe der Erde zu beschreiben. Nachdem zunächst die Kugel als Erdmodell diente, setzte sich in der Mitte des 18. Jahrhunderts das Rotationsellipsoid als mathematische Figur durch. Das verbreitetste Verfahren war die Gradmessung in Äquator- und Polnähe. Mit diesen Ergebnissen erwies sich die Erde am Pol als abgeplattet. Durch ein an den Polen abgeplattetes Rotationsellipsoid läßt sich die Erdoberfläche in guter Näherung darstellen. Die Höhenabweichungen zwischen dem Ellipsoid und dem Geoid (Geoid-undulation = Abstand der Höhenbezugsfläche vom Referenzellipsoid) betragen weniger als 100 m. Bei dem Rotationsellipsoid handelt es sich um eine mathematische glatte Fläche. Es ist die Bezugsfläche für Lagekoordinaten. Bei dem Geoid handelt es sich um eine unregelmäßige Fläche. Es ist die Bezugsfläche für orthometrische Höhen.

Durch die verbesserte Meßtechnik und die größere Auswahl an Bestimmungsgrößen haben sich die Kenntnis der Ellipsoidparameter und die Lagerung des Ellipsoids zum Erdmittelpunkt sowie zur Umdrehungsachse mit der Zeit verfeinert. Die Ellipsoidparameter und die Orientierung des Ellipsoids in einem gedachten globalen terrestrischen dreidimensionalen Koordinatensystem werden als Geodätisches Datum bezeichnet. Die Datumsfestlegungen gestatten es, ellipsoidische Koordinaten (B_1, L_1) des einen Ellipsoids in ein anderes Ellipsoid (B_2, L_2) umzurechnen. Die Datumsfestlegungen bilden somit auch die Grundlage für die aus ellipsoidischen Koordinaten abgeleiteten ebenen Koordinatensysteme, z. B. Gauß-Krüger für die Landesvermessung oder UTM für die Seevermessung. Im Zusammenhang mit dieser Aufgabe

sind drei Datumsfestlegungen von Belang: das WGS 84, in welchem die Positionsangaben der Satellitenempfänger berechnet werden, das Europäische Datum 1950 (ED 50), welches die Grundlage für die UTM-Koordinaten bildet, und schließlich das Potsdam-Datum mit dem Bessel-Ellipsoid, welches die Rechenfläche für die Gauß-Krüger-Koordinaten darstellt.

3 DATUMSTRANSFORMATION

3.1 Das geodätische Datum des GPS

Bauer 1989 [1] führt aus, daß die aus den Ephemeriden (Bahndaten) von GPS berechneten Koordinaten der Satelliten, Koordinaten im geodätischen Bezugssystem World Geodetic System (WGS 84) sind.

Bei diesem Koordinatensystem fallen Figurenmittelpunkt und Figurenachsen des zugehörigen Referenzellipsoids mit den Achsen des globalen terrestrischen Koordinatensystems zusammen.

Das terrestrische Koordinatensystem ist wie folgt definiert:

Koordinatenursprung: Geozentrum

Z-Achse: momentane Erdrotationsachse

XZ-Ebene: definiert durch die Z-Achse und den Meridian von Greenwich

Y-Achse: Drehung der X-Achse um 90° gegen den Uhrzeigersinn

Das WGS 84 ist ein globales dreidimensionales kartesisches Koordinatensystem. Dieses System entspricht im wesentlichen dem terrestrischen Koordinatensystem. Es ist so definiert, daß der Koordinatenursprung des Koordinatensystems mit dem Massenmittelpunkt der Erde zusammenfällt und

- die Z-Achse durch den durch Übereinkunft vom Bureau International de l'Heure (BIH) festgelegten Nordpol (Conventional Terrestrial Pole [CTP]) verläuft,

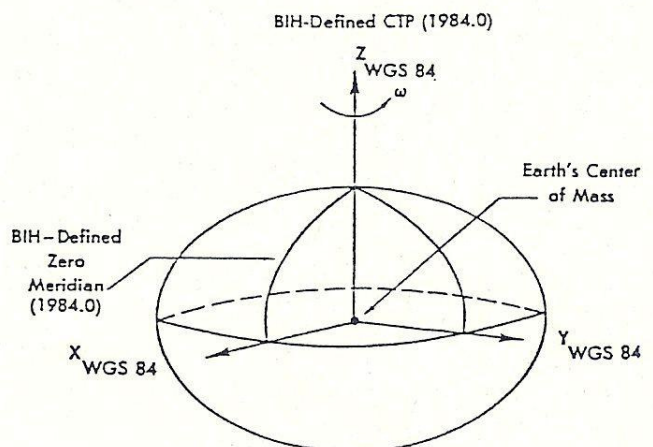


Bild 1
World Geodetic System 84
(Defence Mapping Agency 1987)

- die X-Achse die Schnittgerade bildet, die sich aus der WGS-84-Nullmeridianebene mit der CTP-Äquatorebene ergibt und durch den durch das BIH festgelegten Meridian von Greenwich verläuft,
- die Y-Achse rechtwinklig zur X-Achse nach Osten verläuft. Beide Achsen bilden eine Äquatorebene, die der CTP-Äquatorebene entspricht (Bild 1).

Neben der geometrischen Festlegung dieses Koordinatensystems gehören zu WGS 84 u. a.:

- ein mathematisches Modell des Schwerfeldes der Erde
- die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum
- das Produkt aus der Gravitationskonstanten und der Masse der Erde.

Für die Festlegung von Punkten auf der Erde würde ein so definiertes Koordinatensystem ausreichen, allerdings handelt es sich bei den Koordinaten X, Y und Z um Werte, die sich der Mensch nur schlecht vorstellen kann. Daher werden die geozentrischen Koordinaten zur praktischen Anwendung noch in geographische Koordinaten oder Gauß-Krüger-Koordinaten umgerechnet.

3.2 Datumstransformation vom WGS 84 in das Europäische Datum 1950 (ED 50)

Terrestrische Vermessungen oder Navigationsaufgaben, wie sie z. B. in der Seevermessung vorkommen, beziehen sich in der Regel auf lokale Bezugssysteme, d. h., das Ellipsoid paßt sich einem Ausschnitt der Erdoberfläche bestmöglich an. Ein solches Datum ist z. B. das Europäische Datum 1950 (ED 50). Als Ellipsoid wird hier das von Hayford ermittelte Internationale Ellipsoid verwendet. Wegen der internationalen Bedeutung wird das Europäische Datum außer im militärischen Bereich heute auch in der Seekarte verwendet.

Die Positionsbestimmung mit GPS erfolgt im WGS 84. Aus den ellipsoidischen Koordinaten φ und λ im WGS 84 müssen zunächst kartesische Koordinaten X, Y und Z im WGS 84 berechnet werden. Nach Torge 1975 [6] gilt:

$$X = (N + h) \cdot \cos \varphi \cdot \cos \lambda \quad (3.1)$$

$$Y = (N + h) \cdot \cos \varphi \cdot \sin \lambda \quad (3.2)$$

$$Z = (N \cdot [1 - e^2] + h) \cdot \sin \varphi \quad (3.3)$$

Hierin bedeuten:

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi}} \quad (3.4)$$

Ellipsoidparameter des WGS 84 Defence Mapping Agency 1987 [2]:

$$\begin{aligned} a &= 6\,378\,137 \text{ m} & e^2 &= 0,00669437999013 \\ \varphi &= \text{Breite} & N &= \text{Querkrümmungsradius} \\ \lambda &= \text{Länge} & e^2 &= \text{Erste numerische Exzentrizität} \\ h &= \text{ellipsoidische Höhe} & a &= \text{große Halbachse} \end{aligned}$$

Zwischen dem WGS 84 und dem ED 50 wird nun eine 3-Parametertransformation durchgeführt. Die Transformationsformel lautet:

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix}_{\text{ED 50}} = \begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{\text{WGS 84}} \quad (3.5)$$

mit $dX = 87 \text{ m}$; $dY = 98 \text{ m}$; $dZ = 121 \text{ m}$ Defence Mapping Agency 1987 [2],

d. h., zu den berechneten kartesischen Koordinaten im WGS 84 werden die Transformationsparameter dX , dY und dZ addiert. Die so erhaltenen kartesischen Koordinaten im ED 50 müssen nun mit den Ellipsoidparametern des Internationalen Ellipsoids in ellipsoidische Koordinaten umgewandelt werden.

Ellipsoidparameter vom ED 50 Schödlbauer 1981 [4]:

$$a = 6\,378\,388 \text{ m} \quad e^2 = 0,006722670$$

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi}} \quad (3.6)$$

$$\varphi = \arctan \left(\frac{Z'}{\sqrt{X'^2 + Y'^2}} \cdot \left(1 - e^2 \cdot \frac{N}{N + h} \right)^{-1} \right) \quad (3.7)$$

$$\lambda = \arctan \frac{Y'}{X'} \quad (3.8)$$

$$h = \frac{\sqrt{X'^2 + Y'^2}}{\cos \varphi} - N \quad (3.9)$$

Diese Aufgabe ist für φ und h nur iterativ zu lösen, jedoch konvergiert die Entwicklung wegen $h \ll N$ sehr rasch.

3.3 Datumstransformation von geographischen Koordinaten ED 50 auf dem Internationalen Ellipsoid in das Gauß-Krüger-Koordinatensystem auf dem Besselipsoid

Für die Transformation von geographischen Koordinaten im ED 50 in UTM-Koordinaten gilt nach Schödlbauer 1982 [5]:

(a) Längenunterschied

$$\begin{aligned} \Delta L &= L - L_H \\ L_H &= \text{Hauptmeridian} \end{aligned} \quad (3.10)$$

(b) Koordinaten x, y

$$x = \{0\}_x + \{2\}_x \cdot \Delta L^2 + \{4\}_x \cdot \Delta L^4 + \{6\}_x \cdot \Delta L^6 \quad (3.11)$$

$$y = \{1\}_y \cdot \Delta L + \{3\}_y \cdot \Delta L^3 + \{5\}_y \cdot \Delta L^5 \quad (3.12)$$

Bedeutung der Koeffizienten:

$$\{0\}_x = m_H \cdot G \quad (3.13)$$

G = Meridianbogenlänge zur geographischen Breite φ auf dem Internationalen Ellipsoid

nach Schödlbauer 1981 [4] ergibt sich:

$$G = E_0 \cdot \varphi + E_2 \cdot \sin 2 \varphi + E_4 \cdot \sin 4 \varphi + E_6 \cdot \sin 6 \varphi \quad (3.14)$$

Mit den Konstanten des Internationalen Ellipsoids nehmen die Konstanten E_i folgende Werte an:

$$\begin{aligned} E_0 &= 111\,136,536655 \text{ m}^\circ & E_4 &= 16,9763 \text{ m} \\ E_2 &= -16\,107,0347 \text{ m} & E_6 &= -0,0223 \text{ m} \end{aligned}$$

$$\{2\}_x = \frac{m_H}{2 \cdot q^2} \cdot N' \cdot \cos^2 \varphi \cdot t \quad (3.15)$$

$$\{4\}_x = \frac{m_H}{24 \cdot q^4} \cdot N' \cdot \cos^4 \varphi \cdot t \cdot (5 - t^2 + 9 \cdot \mu^2) \quad (3.16)$$

$$\{6\}_x = \frac{m_H}{720 \cdot q^6} \cdot N' \cdot \cos^6 \varphi \cdot t \cdot (61 - 58 \cdot t^2 + t^4) \quad (3.17)$$

$$\{1\}_y = \frac{m_H}{q} \cdot N' \cdot \cos \varphi \quad (3.18)$$

$$\{3\}_y = \frac{m_H}{6 \cdot q^3} \cdot N' \cdot \cos^3 \varphi \cdot (1 - t^2 + \mu^2) \quad (3.19)$$

$$\{5\}_y = \frac{m_H}{120 \cdot q^5} \cdot N' \cdot \cos^5 \varphi \cdot (5 - 18 \cdot t^2 + t^4 + \mu^2 \cdot [14 - 58 \cdot t^2]) \quad (3.20)$$

wobei

$$t = \tan \varphi$$

$$\mu^2 = e'^2 \cdot \cos^2 \varphi$$

$$N' = \frac{c}{\sqrt{1 + \mu^2}} = \text{Querkrümmungshalbmesser}$$

$$c = 6\,399\,936,608 \text{ m} = \text{Polkrümmungshalbmesser des Internationalen Ellipsoids}$$

$e'^2 = 0,006768170$ = Quadrat der Zweiten numerischen Exzentrizität des Internationalen Ellipsoids

$m_H = 0,9996$ = Maßstabsfaktor der UTM-Abbildung im Hauptmeridian $L = L_H$

$$q = \frac{180}{\pi}$$

(c) UTM-Koordinaten

$$N = x \quad (3.21)$$

$$E = y + k \quad k = 500\,000 \text{ m} \quad (3.22)$$

Die topographischen Karten der deutschen Landesvermessung beruhen auf dem Potsdam-Datum, ebenso wie die Koordinaten der Landesvermessung. Für das dem Potsdam-Datum zugrunde liegende Bessel-Ellipsoid sind jedoch keine Verschiebungsvektoren dX , dY , dZ bekannt, eine Vorgehensweise wie bei der Übertragung vom WGS 84 nach ED 50 entfällt also. Man behilft sich damit, die in ihren Abbildungseigenschaften ähnlichen Koordinatensysteme UTM und Gauß-Krüger (konforme Abbildung der Ellipsoide) durch ebene Transformationen ineinander zu überführen. Hierzu wird eine 6-Parametertransformation benutzt, deren Parameter aus Koordinatengitter vorausberechnet wurden.

Die Transformationsformeln lauten:

$$H = \frac{b \cdot E - f \cdot N - b \cdot h + c \cdot f}{(b \cdot g - a \cdot f)} \quad (3.23)$$

$$R = \frac{E - g \cdot \frac{b \cdot E - f \cdot N - b \cdot h + c \cdot f}{(b \cdot g - a \cdot f)} - h}{f} \quad (3.24)$$

Die Parameter a , b , c , f , g und h sind in der Technischen Anleitung 1973 [3] vertafelt.

3.4 Berechnungsbeispiel

$$\varphi = 49,8609^\circ \quad \lambda = 8,6808^\circ \quad h = 215,0674 \text{ m}$$

Mit den gegebenen ellipsoidischen Koordinaten im WGS 84 ergibt sich folgendes:

Berechnung der kartesischen Koordinaten im WGS 84 mit den Ellipsoidparametern vom WGS 84.

Nach Gleichung (3.1) bis (3.4) ergibt sich:

$$X = 4\,072\,647,937 \text{ m} \quad Y = 621\,806,066 \text{ m} \quad Z = 4\,852\,994,007 \text{ m}$$

Zu den berechneten kartesischen Koordinaten im WGS 84 werden die Transformationsparameter ED 50 dX , dY und dZ addiert.

Nach Gleichung (3.5) ergibt sich:

$$X' = 4\,072\,734,937 \text{ m} \quad Y' = 621\,904,066 \text{ m} \quad Z' = 4\,853\,115,007 \text{ m}$$

Berechnung der ellipsoidischen Koordinaten im ED 50 mit den Ellipsoidparametern vom ED 50.

Nach Gleichung (3.6) bis (3.9) ergibt sich:

$$\varphi = 49,8617^\circ \quad \lambda = 8,6820^\circ \quad h = 174,869 \text{ m}$$

Der Zusammenhang zwischen der ellipsoidischen Höhe (Satellitenvermessung) und der orthometrischen Höhe eines Punktes wird hergestellt durch die nachstehende Gleichung:

$$h = H + N \quad (3.25)$$

h : ellipsoidische Höhe H : orthometrische Höhe N : Geoidundulation
Die Geoidundulation ist allerdings meßtechnisch schwer zu bestimmen. Die Höhe kann also nicht verarbeitet werden.

Berechnung von geographischen Koordinaten im ED 50 in UTM-Koordinaten.

Nach Gleichung (3.10) bis (3.22) ergibt sich:

$$E = 477\,140,960 \text{ m} \quad N = 5\,523\,415,701 \text{ m}$$

Ebene Affintransformation der UTM-Koordinaten in Gauß-Krüger-Koordinaten.

Mit den Parametern der Masche 292 Technische Anleitung 1973 [3] und der Gleichung (3.23) und (3.24) ergibt sich:

$$\begin{aligned} a &= 0,9996104408 & f &= 0,9996117429 & H &= 5\,524\,984,382 \text{ m} \\ b &= -0,0000068702 & g &= 0,0000030855 & R &= 477\,126,193 \text{ m} \\ c &= 586,9051 & h &= 183,2389 \end{aligned}$$

Die Berechnung erfolgt im Hauptmeridian 9, d. h.

$$R = 3\,477\,126,193 \text{ m.}$$

4 GENAUIGKEITSUNTERSUCHUNG

Die Transformationsparameter für das Gebiet des Deutschen Hauptdreiecksnetzes (DHDN) sind in der Technischen Anleitung 1973 [3] mit 542 Maschen vertafelt. Werden die Parameter einer benachbarten Masche verwendet, können Fehler von ca. 3 cm auftreten. Die Fehler, die bei dieser Transformation auftreten, sind gering gegenüber der Transformation vom WGS 84 in ED 50. Die absoluten Differenzen zwischen beiden Systemen betragen gemäß Defence Mapping Agency 1973 [2] zwischen 3 m und 6 m. Wird bei einer Messung in Wiesbaden die Masche von Hamburg oder von München gewählt, treten Fehler von ca. 4 m auf.

5 SCHLUSSFOLGERUNG

Das angewendete Näherungsverfahren zeigt eine Möglichkeit zur Transformation vom WGS 84 in das Gauß-Krüger-Koordinatensystem auf. Satellitendatum und lokales Datum können sich in folgenden Punkten unterscheiden:

1. Maßstab
2. Richtung der Achsen der Koordinatensysteme
3. Koordinatenursprung.

Durch

1. Änderung des Maßstabes
2. drei Rotationen des Systems um die X-Achse, Y-Achse, Z-Achse
3. drei Translationen des Systems um ΔX , ΔY , ΔZ

können die Systeme ineinander überführt werden.

Der Zusammenhang zwischen den Koordinaten des Satellitendatums und den Koordinaten des lokalen Datums ist also durch eine 7-Parametertransformation gegeben. Bei Transformationen in einem begrenzten Gebiet, z. B. Transformation von Satellitendatum in das Potsdam-Datum, ist eine Unterscheidung zwischen Koordinatendifferenzen aus den Rotationsparametern und Koordinatendifferenzen aus den Translationsparametern nicht mehr möglich. Nach Defence Mapping Agency 1987 [2] wird für ED 50 keine Rotation und kein Maßstab angegeben. Die Genauigkeit dieser 3-Parametertransformation läßt sich aufgrund der absoluten Genauigkeit in der Translation mit 3 m bis 6 m angeben.

LITERATUR

- [1] Bauer, M.: Vermessung und Ortung mit Satelliten. Herbert Wichmann Verlag, Karlsruhe, 1989.
- [2] Defence Mapping Agency: Supplement to Department of Defence World Geodetic System 1984, Part 1. Building 56, US Naval Observatory. Washington, DC 20305-3000; 1987.
- [3] Militärgeographisches Amt: Technische Anleitung (TA VERM 10), Affine Transformation. Bonn-Bad Godesberg 1973.
- [4] Schödlbauer, A.: Rechenformeln und Rechenbeispiele zur Landesvermessung Teil 1. Herbert Wichmann Verlag, Karlsruhe, 1981.
- [5] Schödlbauer, A.: Rechenformeln und Rechenbeispiele zur Landesvermessung Teil 2. Herbert Wichmann Verlag, Karlsruhe, 1982.
- [6] Torge, W.: Geodäsie. Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1975.

Anschrift des Verfassers

Dipl.-Ing. Dipl.-Ing. Hans-Joachim Kleinfeld, Hessisches Landesvermessungsamt, Schaperstraße 16, 6200 Wiesbaden.